Prinzipien des Wasserraketenfluges

Markus Schiebl

Vorwort

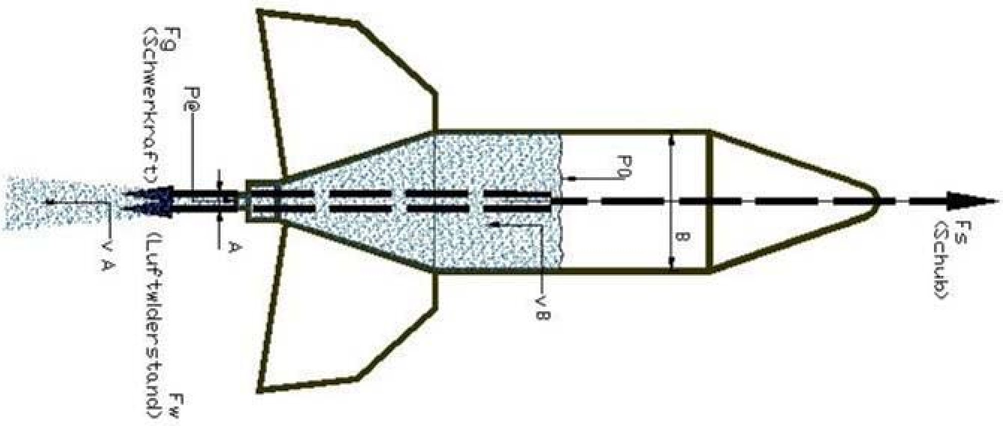
Das in diesem kleinen Heftchen vermittelte Wissen setzt Abiturienten-Niveau in den Gebieten Mathematik und Physik voraus. Es wurde speziell darauf geachtet, die physikalischen Gesetzmäßigkeiten „relativ" genau zu beschreiben –wobei das Wörtchen relativ, relativ ist- und ohne Näherungsannahmen zu arbeiten. Unabhängig dieser Betrachtungsweise wird das Ergebnis (besser: der Zahlenwert des Ergebnisses) dennoch „nur" eine Näherungslösung sein, da, aufgrund der Komplexität des Themas, nur eine iterierte Lösung mit Hilfe eines Computerprogramms zustande kommt. Weiters möchte ich darauf hinweisen, dass sich der Flug der Rakete im Wesentlichen aus vier Teilen zusammensetzt. 1. Ausstoßphase des schweren Mediums, 2. Ausstoßphase des leichten Mediums, 3. Freiflug, 4. Fallen. Die Teile 2 und 4 werden nicht berücksichtigt, da Teil 2 nicht wesentlich zur Erhöhung der Flughöhe beiträgt, und Teil 4 das Zurückkehren an die Oberfläche beschreibt.

1.0 Bewegungsgleichung während der Impulsphase

1.1 Allgemeines

Das Prinzip des Raketenantriebes ist eine direkte Folgerung des dritten Newton`schen Axioms „Actio ist gleich Reactio". Es besagt, das ein Körper, welcher eine Kraft auf einen anderen Körper ausübt, ebenso von diesem Körper eine Kraft gleichen Betrages aber unterschiedlichen Vorzeichens erfährt. $(\vec{F}_1 = -\vec{F}_2)$.

Während der Impulsphase gilt folgendes Bild.



Die Schubkraft ergibt sich aus folgender Überlegung. Da wir die „innere" Kraft welche die Rakete beschleunigt nicht kennen, müssen wir auf einem Umweg zu ihr gelangen. Wie schon oben erwähnt gilt das 3. Newton'sche Axiom „Actio ist gleich Reactio". Dies machen Wir uns zu Nutze. Wir betrachten zu diesem Zwecke nicht die Rakete selbst, sondern nur das kinematische Verhalten des

Mediums aus dem der Schub erwächst (hier: Wasser). Gelingt es uns, eine Kraft aus diesem Verhalten abzuleiten, so kennen wir die Schubkraft, welche die Rakete beschleunigt, da ja gilt: actio = reactio.

Folgender Ansatz:

Wichtig: Das Bezugssystem bei unseren Überlegungen bildet hier die Rakete.

Warum?

Antwort: Die Wasser-Massen stoßen sich von der Rakete ab. Genau so, wie die Rakete von dem Wasser. Zum besseren Verständnis denke man an einen Schienenwagen auf dem jemand seht und Steine in eine Richtung wirft (entlang der Schienen).

Die Rakete stößt das Treibmittel entgegengesetzt der Flugrichtung aus. Das das Treibmittel bezüglich der Rakete vor dem Ausstoß in Ruhe war, und sich nach dem Ausstoß mit einer gewissen Geschwindigkeit $\mathbf{v}_e$ relativ zur Rakete bewegt, musste wohl eine Kraft auf das Treibmittel wirken um die Geschwindigkeit $\mathbf{v}_e$ aufzunehmen. Genau diese Kraft hat zur Wirkung, dass die Rakete in entgegengesetzter Richtung beschleunigt (actio = reactio). Aus diesem Prinzip folgt ja erst das Impulserhaltungsgesetz für ein physikalisches System. Dies bedeutet, dass der Impuls der Rakete betragsmäßig gleich des Impulses des ausgestoßenen Treibmittel ist.

$$\vec{p}_R(t) = -\vec{p}_T(t) \tag{1.1}$$

Berechnen wir nun jene Kraft, welche die Rakete beschleunigt. Dazu berechnen wir den Impuls des Treibmittels zu einer bestimmten Zeit t und $t+\Delta t$, bilden die Differenz und erhalten so die Impulsänderung der Rakete. Diese Impulsänderung beziehen wir dann auf das Zeitintervall in dem die Änderung stattfand, und erhalten so jene Kraft, welche für die Impulsänderung verantwortlich ist.

Zum Zeitpunkt t ist der Impuls des Treibmittels:

$$t : \vec{p}(t) = \int_0^t \dot{m}(t) \cdot \vec{v}_e(t) dt \tag{1.2}$$

$$\dot{m}(t) = \frac{dm(t)}{dt} \tag{1.3}$$

Zum Zeitpunkt $t+\Delta t$ ist der Impuls des Treibmittels:

$$t+\Delta t : \vec{p}(t) = \int_0^{t+\Delta t} \dot{m}(t) \cdot \vec{v}_e(t) dt \tag{1.3}$$

Die Differenz ist ($\vec{F}\Delta t$ ist Kraftstoß):

$$\begin{aligned} \vec{p}(t+\Delta t) - \vec{p}(t) &= \int_0^{t+\Delta t} \dot{m}(t) \cdot \vec{v}_e(t) dt - \int_0^t \dot{m}(t) \cdot \vec{v}_e(t) dt \\ \vec{p}(t+\Delta t) - \vec{p}(t) &= \int_t^{t+\Delta t} \dot{m}(t) \cdot \vec{v}_e(t) dt = \vec{F}\Delta t \end{aligned} \tag{1.4}$$

Division durch Δt

$$\frac{\vec{p}(t+\Delta t)-\vec{p}(t)}{\Delta t}=\frac{\int\limits_{t}^{t+\Delta t}\dot{m}(t)\cdot\vec{v}_e(t)dt}{\Delta t}=\vec{F} \tag{1.5}$$

Damit wir die momentane Schubkraft $\vec{F}(t)$ und nicht die Durchschnittsskraft $\vec{F}$ erhalten, führen wir den Grenzübergang $\Delta t \to 0$ durch.

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{p}(t+\Delta t)-\vec{p}(t)}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\int\limits_{t}^{t+\Delta t}\dot{m}(t)\cdot\vec{v}_e(t)dt}{\Delta t}$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt}=\frac{d}{dt}\int\limits_{t}^{t+\Delta t}\dot{m}(t)\cdot\vec{v}_e(t)dt \tag{1.6}$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt}=\dot{m}(t)\cdot\vec{v}_e(t)=\vec{F}(t)$$

Mathematisch gesprochen: Die erste Ableitung des Impulses ergibt eine Kraft. Diese Kraft hat aber auch zur Ursache, das die Rakete den gleichen Impuls nur in entgegen gesetzter Richtung aufnimmt. Diese Kraft nennt man Schub.

Unsere Schubkraft $\vec{F}s$ ist folglich:

$$\vec{F}s=-\vec{F} \tag{1.8}$$

Da sich das Medium von der Rakete „entfernt“ (entgegengesetzt der Bewegungsrichtung der Rakete) definieren wir $\vec{v}_e$ in vektorieller Schreibweise:

$$\vec{v}_e = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -v_{e_z} \end{pmatrix} \qquad (1.9)$$

Da die x und y-Komponente 0 ist, entspricht der Betrag von $\vec{v}_e$ gleich der z-Komponente. Aus diesem Grunde wird in späterer Folge v_e statt v_{e_z} verwendet.

Die Schubkraft lautet daher:

$$\vec{F}_S = -\frac{dm}{dt} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -v_e \end{pmatrix} \qquad (1.10)$$

Die Gravitationskraft ist:

$$\vec{F}_g = m \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} \qquad (1.11)$$

Die Widerstandskraft auf Grund des Luftwiderstandes errechnet sich:

$$\vec{F}_w = c_w \int_B \vec{q} \cdot d\vec{S} \tag{1.12}$$

Der Staudruck $\vec{q}$ errechnet sich:

$$\vec{q} = \frac{\rho}{2} \cdot \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} \cdot \|\vec{v}\|^2 \tag{1.13}$$

Betragsmäßig ist $\vec{q}$

$$\|\vec{q}\| = \frac{\rho \cdot \|v\|^2}{2} \tag{1.14}$$

Da wir aber vektoriell rechnen, muss eine Richtungsinformation (Einheitsvektor!) erhalten bleiben. Dies leistet der Term: $\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$

Zurück zur Widerstandskraft:

$$\vec{F}_w = c_w \cdot \int_B \begin{pmatrix} q_x \\ q_y \\ q_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} d(r,\varphi) \tag{1.16}$$

Da

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v_z \end{pmatrix} \tag{1.17}$$

folgt:

$$\vec{q} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ q_z \end{pmatrix} \tag{1.18}$$

(1.19)

$$\Rightarrow \vec{F}_w = c_w \int_B \begin{pmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} d(r,\varphi) = c_w \int_B \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ q_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} d(r,\varphi) = c_w \int_B q_w \cdot n_z \; d(r,\varphi)$$

Da die Strömungsgeschwindigkeit der Luftteilchen relativ zur Rakete örtlich konstant ist, zeitlich aber variiert:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\delta q_z}{\delta r} \\ \dfrac{\delta q_z}{\delta \varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1.20}$$

vereinfacht sich die Widerstandskraft zu:

$$F_{w_z} = c_w \cdot q_z \int_{\mathbf{B}} n_z \; d(r,\varphi) \tag{1.21}$$

Der Term

$$\int_{B} n_z \; d(r,\varphi) \tag{1.22}$$

ist die projizierende Fläche in Richtung des Strömungsgeschwindigkeitsvektors. Die Widerstandskraft lässt sich dadurch vereinfacht schreiben:

$$F_{w_z} = c_w \cdot A_{proj} \cdot \frac{\rho_l}{2} \cdot v_z^{\,2} \tag{1.23}$$

Da die Widerstandskraft die Bewegung der Rakete hemmt, ergibt sich F_w zu:

$$F_{w_z} = -c_w \cdot A_{proj} \cdot \frac{\rho_l}{2} \cdot v_z^{\,2} \tag{1.24}$$

Die Bewegungsgleichung lautet nun:

$$m \cdot \vec{a} = \vec{F}_S + \vec{F}_g + \vec{F}_w \tag{1.25}$$

$$m(t) \cdot \vec{a}(t) = -\frac{dm(t)}{dt}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -v_e \end{pmatrix} + m(t)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -c_w \cdot A_{proj} \cdot \frac{\rho_l}{2} \cdot v_z(t)^2 \end{pmatrix} \tag{1.26}$$

Man sieht, das die Rakete nur vertikal (z-Richtung) translatiert, was unserer Annahme entspricht.

$$m(t) \cdot a(t) = \frac{dm(t)}{dt} \cdot v_e(t) - m(t) \cdot g - c_w \cdot A_{proj} \cdot \frac{\rho_l}{2} \cdot v(t)^2 \tag{1.27}$$

Die Beschleunigung der Rakete ist eine Differentialgleichung:

$$\frac{dv(t)}{dt} = a(t) = \frac{\dot{m}(t)}{m(t)} \cdot v_e(t) - g - \frac{c_w}{m(t)} \cdot A_{proj} \cdot \frac{\rho_L}{2} \cdot v(t)^2 \tag{1.30}$$

Die Masse $m(t)$ ist zeitlich nicht konstant. Sie setzt sich aus der Eigenmasse der Rakete plus der Masse des Mediums zu Beginn, minus der ausgestoßenen Masse zusammen.

Eigenmasse plus Masse des Mediums zu Beginn ist:

$$m_{eig} = M + (F - V) \cdot \rho \tag{1.31}$$

Die ausgestoßenen Masse ergibt sich aus folgender Überlegung:

$$Vol(t) = A \cdot h(t) \tag{1.32}$$

$$Vol(t) = A \cdot \int_0^t v_e(\xi)\, d\xi \tag{1.33}$$

$$m_{aus}(t) = \rho \cdot A \cdot \int_0^t v_e(\xi)\, d\xi \qquad (1.34)$$

$$m(t) = M + (F - V) \cdot \rho - \rho \cdot A \cdot \int_0^t v_e(\xi)\, d\xi \qquad (1.35)$$

Der Massenstrom $\dot{m}$ errechnet sich aus:

$$\dot{m}(t) = A \cdot v_e(t) \cdot \rho \qquad (1.36)$$

Die Beschleunigung ist mit $A_{proj} = B$:

$$a(t) = \frac{A \cdot v_e(t)^2 \cdot \rho}{M + (F - V) \cdot \rho - A \cdot \rho \cdot \int_0^t v_e(\xi)\, d\xi} - g - \frac{c_w \cdot B \cdot \frac{\rho_l}{2} \cdot v(t)^2}{M + (F - V) \cdot \rho - A \cdot \rho \cdot \int_0^t v_e(\xi)\, d\xi}$$

(1.37)

$$a(t) = \left(\frac{A \cdot v_e(t)^2 \cdot \rho - c_e \cdot B \cdot \frac{\rho_l}{2} \cdot v(t)^2}{M + (F - V) \cdot \rho - A \cdot \rho \cdot \int_0^t v_e(\xi)\, d\xi} \right) - g \qquad (1.38)$$

2.0 Austrittsgeschwindigkeit des Mediums

Die Austrittsgeschwindigkeit lässt sich mit Hilfe der Bernoullischen Druckhöhengleichung berechnen. Diese Gleichung besagt, dass die Summe aus statischen Druck, kinetischen Druck und geodätischen Druck konstant ist.

$$\begin{aligned} p+\rho g h_1+\frac{\rho v_B{}^2}{2} &= p_\infty+\rho g h_2+\frac{\rho v_e{}^2}{2} \\ v_e{}^2 &= \frac{2}{\rho}\cdot\left(p-p_\infty\right)+2g\left(h_1-h_2\right)+v_B{}^2 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Der Term $2g\left(h_1-h_2\right)$ existiert nur aufgrund der Gravitation. Da die Gravitation keine Kraft, welche aus der Wechselwirkung zwischen Rakete und Medium entsteht, ist, trägt dieser Term nichts zum Schub bei.
Daraus folgt:

$$v_e{}^2=\frac{2}{\rho}\cdot\left(p-p_\infty\right)+v_B{}^2 \tag{2.2}$$

Aufgrund der Kontinuitätsbedingung folgt:

$$v_B=\frac{A}{B}\cdot v_e \tag{2.3}$$

2.1 Druck im „Brennraum“

Da die Expansion des „Brennraumes“ so rasch von statten geht, liegt eine adiabatische Zustandsänderung des „Brenndruckes“ vor. Das heißt, es findet kein Wärmeaustausch mit der Umgebung statt ($dQ = 0$)

Aus dem ersten Hauptsatz der Thermodynamik und der allgemeinen Zustandsgleichung (für ein Mol)

$$\begin{aligned} dU &= dQ - pdV \\ p \cdot V &= R \cdot T \end{aligned} \tag{2.4}$$

folgt:

$$p(t) \cdot V^{\kappa} = const \tag{2.5}$$

$$p(t) \cdot \left(V_0 + A \cdot \int_0^t v_e(\xi)\, d\xi \right)^{\kappa} = p_0 \cdot V_0^{\kappa} \tag{2.6}$$

$$p(t) = p_0 \cdot \frac{V_0^{\kappa}}{\left(V_0 + A \cdot \int_0^t v_e(\xi)\, d\xi \right)^{\kappa}} \tag{2.7}$$

Zurück zur Austrittsgeschwindigkeit des Mediums:

$$v_e(t)^2 = \frac{2}{\rho} \cdot \left(p(t) - p_\infty\right) + v_B(t)^2 \tag{2.8}$$

Für ein Besseres Verständnis der nun gleich folgenden Erkenntnisse, wird diese Gleichung auf v_B umgeformt und für p eingesetzt.

$$v_e^2 = \frac{2}{\rho} \cdot \left(p_0 \cdot \frac{V_0^{\kappa}}{(V_0 + A \cdot \int_0^t v_e(\xi)\, d\xi)^{\kappa}} - p_\infty \right) + v_B^2 \tag{2.9}$$

$$\left(\frac{B}{A}\right)^2 \cdot v_B^2 = \frac{2}{\rho} \cdot \left(p_0 \cdot \frac{V_0^{\kappa}}{(V_0 + B \cdot \int_0^t v_B(\xi)\, d\xi)^{\kappa}} - p_\infty \right) + v_B^2 \tag{2.10}$$

Auch hier haben wir es wieder mit einer Differentialgleichung zu tun da:

$$\int_0^t v_B(\xi)\, d\xi = h(t) \quad \text{und,} \tag{2.11}$$

$$\frac{dh}{dt} = v_B(t) \tag{2.12}$$

Daraus folgt:

$$\left(\frac{B}{A}\right)^2 \cdot \left(\frac{dh}{dt}\right)^2 = \frac{2}{\rho} \cdot \left(p_0 \cdot \frac{V_0{}^\kappa}{(V_0 + B \cdot h)^\kappa} - p_\infty \right) + \left(\frac{dh}{dt}\right)^2 \tag{2.13}$$

Jetzt erst erkennen wir die Sinnhaftigkeit, warum wir mit v_B rechnen. Da v_B die Geschwindigkeit des Flüssigkeitspegels ist, kann man sich unter der Funktion $h(t)$ recht gut den Weg, welchen der Flüssigkeitspegel durchschreitet vorstellen. In der Tat wird mit Hilfe von der Funktion $h(t)$ der funktionelle Zusammenhang zwischen dem zurückgelegten Weg des Flüssigkeitspegels und der Zeit beschrieben.

Da es für diese Differentialgleichung keine Allgemeine Lösung gibt, muss diese Gleichung:

$$v_e{}^2 = \frac{2}{\rho} \cdot \left(p_0 \cdot \frac{V_0{}^\kappa}{\left(V_0 + A \cdot \int\limits_0^t v_e(\xi)\, d\xi \right)^\kappa} - p_\infty \right) + \left(\frac{A}{B}\right)^2 v_e{}^2 \tag{2.14}$$

$$v_e = \sqrt{\frac{\cdot \left(p_0 \cdot \frac{V_0^{\kappa}}{\left(V_0 + A \cdot \int_0^t v_e(\xi)\, d\xi \right)^{\kappa}} - p_\infty \right)}{1 - \left(\frac{A}{B} \right)^2}} \qquad (2.15)$$

diskretisiert und durch Iteration gelöst werden.

Da aber v_e nur durch Iteration gelöst werden kann, muss auch die gesamte Bewegungsgleichung iterativ gelöst werden. Die Iterationsschleife ergibt sich wie folgt:

Anfang:

$\Delta t = 0$

1. Schritt

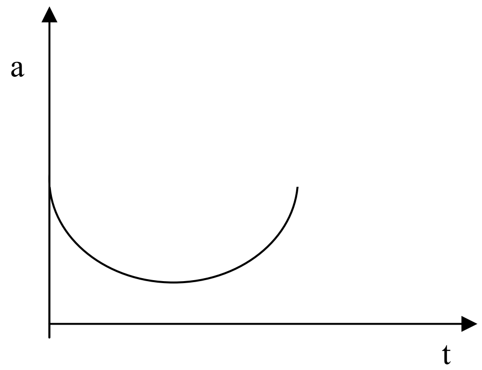
$$v_e(n+1)=\sqrt{\frac{\left(\cdot\; p_0\cdot\frac{V_0^{\kappa}}{\left(V_0+\left(\sum_0^n A\cdot v_e(n)\right)\cdot\Delta t\right)^{\kappa}}-p_\infty\right)}{1-\left(\frac{A}{B}\right)^2}} \qquad (2.16)$$

2. Schritt

$$a(n+1)=\left(\frac{A\cdot v_e(n)^2\cdot\rho-c_w\cdot B\cdot\frac{\rho_l}{2}\cdot v(n)^2}{M+(F-V)\cdot\rho-\left(\sum_0^n A\cdot\rho\cdot v_e(n)\right)\cdot\Delta t}\right)-g \qquad (2.17)$$

3. Schritt

Δt = Wert (zB.: 0.001)

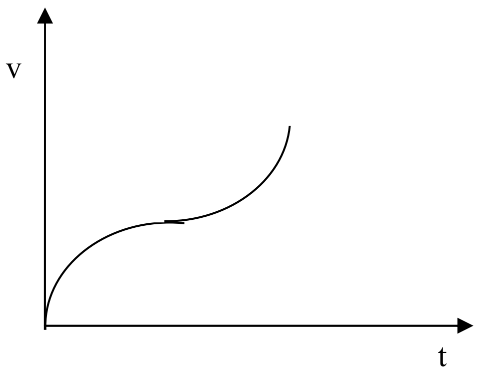


$$v = \left(\sum_{0}^{n} \frac{a(n) + a(n+1)}{2} \right) \cdot \Delta t \qquad (2.18)$$

oder

$$v(n+1) = \frac{\left(a(n) + a(n+1)\right)}{2} + v(n) \qquad (2.20)$$

4. Schritt



$$s = \left(\sum_{0}^{n} \frac{v(n) + v(n+1)}{2} \right) \Delta t \qquad (2.21)$$

oder

$$s(n+1) = \frac{\left(v(n) + v(n+1)\right)}{2} + s(n) \qquad (2.22)$$

Diese Schritte sind solange zu wiederholen, bis

$$(F-V)\cdot\rho-\left(\sum_{0}^{n}A\cdot\rho\cdot v_e(n)\right)\Delta t=0 \qquad (2.23)$$

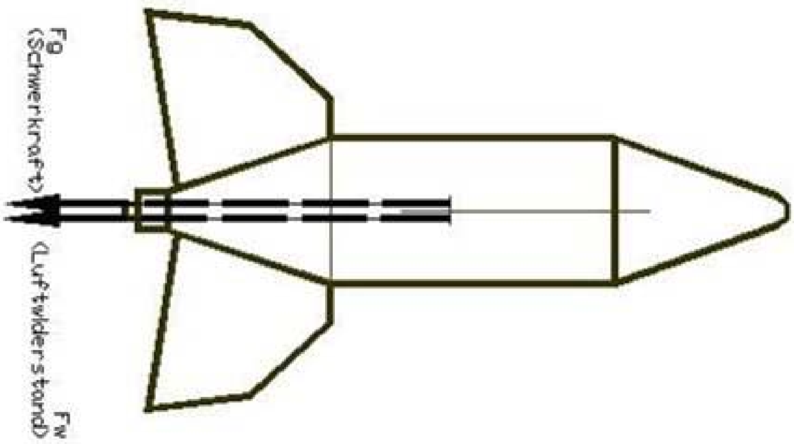
ist. Ist diese Gleichung Null, so wurde genau so viel Wasser ausgestoßen, wie ursprünglich zur Verfügung stand.

oder bis die Gleichung

$$\left(p_0\cdot\frac{V_0{}^{\kappa}}{\left(V_0+\left(\sum_{0}^{n}A\cdot v_e(n)\right)\cdot\Delta t\right)^{\kappa}}-p\infty\right)\leq 0 \qquad (2.24)$$

ist. Dies bedeutet, dass kein Überdruck mehr vorhanden ist um das Wasser auszustoßen. Die Masse der Rakete setzt sich dann aus der Leermasse plus der Masse des in dem „Brennraum“ zurückgebliebenen Mediums zusammen.

3.0 Bewegungsgleichung Freiflug



Die Bewegungsgleichung für den freien Flug lautet:

$$m \cdot \vec{a} = \vec{F}_g + \vec{F}_w \tag{3.1}$$

$$\vec{a} = -\vec{g} - \frac{c_w}{M} \cdot B \cdot \frac{\rho_l}{2} \cdot \vec{v}^2 \tag{3.2}$$

Die Masse M der Rakete setzt sich aus der Leermasse plus der eventuell zurückgebliebenen Masse des Mediums im „Brennraum" zusammen.

Diese Gleichung ist eine Differentialgleichung mit einer Allgemeinen Lösung. Da das bestimmen dieser Lösung nicht unbedingt trivial ist, wird die Lösung mit Hilfe eines mathematischen Computerprogramms generiert.

Die Bewegungsgleichung:

$$\left(\frac{d}{dt}\mathrm{v}(t)\right)+g+\frac{1}{2}\,\frac{Cw\;B\;r\;\mathrm{v}(t)^2}{M}=0 \tag{3.3}$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung ist:

$$\mathrm{v}(t)=-\frac{\tan\left(\frac{\sqrt{g\;M\;Cw\;B\;r}\;(t+\_C1)\;\sqrt{2}}{2\;M}\right)\sqrt{g\;M\;Cw\;B\;r}\;\sqrt{2}}{Cw\;B\;r} \tag{3.4}$$

Da es zu Verwechslungen der beiden Geschwindigkeiten (Geschwindigkeit während der Impulsphase und Geschwindigkeit im Freiflug) kommen kann, wird v(t) im Folgenden mit *geschwindigkeit* bezeichnet.

Die Konstante _C1 wird mit der Anfangsbedingung

$$geschwindigkeit(t=0)=v \tag{3.5}$$

bestimmt.

Die Konstante _C1 lautet somit:

$$\_C1 := -\frac{M\sqrt{2}\,\arctan\left(\frac{Cw\,B\,r\,v\,\sqrt{2}}{2\,\sqrt{g\,M\,Cw\,B\,r}}\right)}{\sqrt{g\,M\,Cw\,B\,r}} \tag{3.6}$$

Die Geschwindigkeitsfunktion ist dann:

$$geschwindigkeit := -\frac{\tan\left(\frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{g\,M\,Cw\,B\,r}\left(t-\frac{M\sqrt{2}\,\arctan\left(\frac{Cw\,B\,r\,v\,\sqrt{2}}{2\,\sqrt{g\,M\,Cw\,B\,r}}\right)}{\sqrt{g\,M\,Cw\,B\,r}}\right)\sqrt{2}}{M}\right)\sqrt{g\,M\,Cw\,B\,r}\,\sqrt{2}}{Cw\,B\,r} \tag{3.7}$$

Die Steighöhe erhält man durch Integration der Geschwindigkeitsfunktion

(3.8)

$$steighoehe := \int -\frac{\tan\left(\frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{g\,M\,Cw\,B\,r}\left(t-\frac{M\sqrt{2}\,\arctan\left(\frac{Cw\,B\,r\,v\,\sqrt{2}}{2\,\sqrt{g\,M\,Cw\,B\,r}}\right)}{\sqrt{g\,M\,Cw\,B\,r}}\right)\sqrt{2}}{M}\right)\sqrt{g\,M\,Cw\,B\,r}\,\sqrt{2}}{Cw\,B\,r}\,d$$

$$steighoehe := -\frac{M\ln\left(1+\tan\left(\frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{g\,M\,Cw\,B\,r}\left(t-\frac{M\sqrt{2}\,\arctan\left(\frac{Cw\,B\,r\,v\,\sqrt{2}}{2\,\sqrt{g\,M\,Cw\,B\,r}}\right)}{\sqrt{g\,M\,Cw\,B\,r}}\right)\sqrt{2}}{M}\right)^{2}\right)}{Cw\,B\,r}+c \qquad (3.9)$$

Die Konstant c wird durch die Anfangsbedingung

$$steighoehe(t=0)=s \qquad (3.10)$$

bestimmt.

Die Konstante c lautet somit:

$$c := \frac{M \ln\left(1 + \frac{Cw\,B\,r\,v^2}{2\,g\,M}\right) + s\,Cw\,B\,r}{Cw\,B\,r} \tag{3.11}$$

Die Steighöhenfunktion ist dann:

$$steighoehe := -\frac{M \ln\left(1 + \tan\left(\frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{g\,M\,Cw\,B\,r}\left(t - \frac{M\sqrt{2}\,\arctan\left(\frac{Cw\,B\,r\,v\sqrt{2}}{2\sqrt{g\,M\,Cw\,B\,r}}\right)}{\sqrt{g\,M\,Cw\,B\,r}}\right)\sqrt{2}}{M}\right)^2\right)}{Cw\,B\,r} + \frac{M \ln\left(1 + \frac{Cw\,B\,r\,v^2}{2\,g\,M}\right) + s\,Cw\,B\,r}{Cw\,B\,r} \tag{3.12}$$

Die Maximale Steighöhe ist erreicht, wenn die Geschwindigkeit Null ist.

(3.13)

$$-\frac{\tan\left(\frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{g\,M\,Cw\,B\,r}\left(t-\frac{M\sqrt{2}\,\arctan\left(\frac{Cw\,B\,r\,v\sqrt{2}}{2\sqrt{g\,M\,Cw\,B\,r}}\right)}{\sqrt{g\,M\,Cw\,B\,r}}\right)\sqrt{2}}{M}\right)\sqrt{g\,M\,Cw\,B\,r}\,\sqrt{2}}{Cw\,B\,r}=0$$

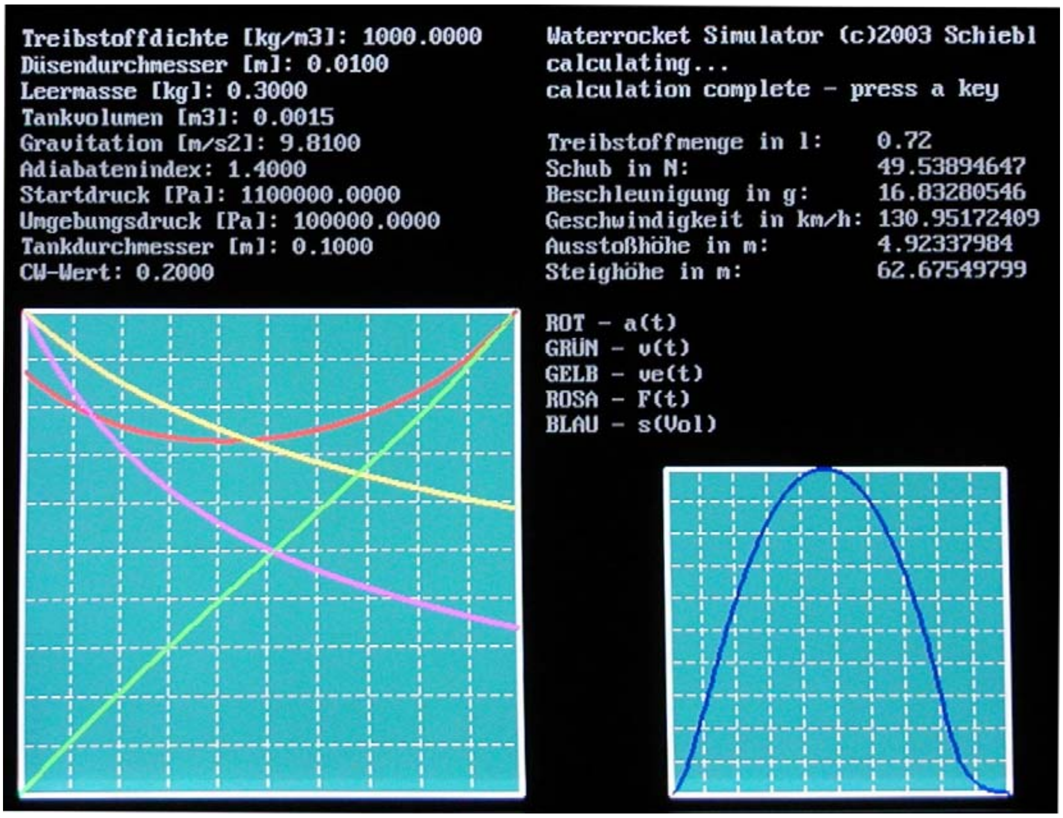
Daraus berechnet sich jene Flugzeit, welche die Steighöhenfunktion maximiert.

$$t:=\frac{M\sqrt{2}\,\arctan\left(\frac{Cw\,B\,r\,v\sqrt{2}}{2\sqrt{g\,M\,Cw\,B\,r}}\right)}{\sqrt{g\,M\,Cw\,B\,r}} \tag{3.14}$$

Die Maximale Steighöhe errechnet sich somit aus

$$Max\_Steighoehe:=\frac{M\ln\left(1+\frac{Cw\,B\,r\,v^2}{2\,g\,M}\right)+s\,Cw\,B\,r}{Cw\,B\,r} \tag{3.15}$$

Der Prozess des Raketenfluges wurde mit Hilfe eines selbst verfassten Computerprogramms erfasst. Ziel Dieses Programms ist es, die optimale Füllmenge zu bestimmen. Anschließend ein Bildschirmausdruck des Raketenberechnungsprogrammes.


Treibstoffdichte [kg/m3]: 1000.0000
Düsendurchmesser [m]: 0.0100
Leermasse [kg]: 0.3000
Tankvolumen [m3]: 0.0015
Gravitation [m/s2]: 9.8100
Adiabatenindex: 1.4000
Startdruck [Pa]: 1100000.0000
Umgebungsdruck [Pa]: 100000.0000
Tankdurchmesser [m]: 0.1000
CW-Wert: 0.2000
Waterrocket Simulator (c)2003 Schiebl
calculating...
calculation complete - press a key
Treibstoffmenge in l: 0.72
Schub in N: 49.53894647
Beschleunigung in g: 16.83280546
Geschwindigkeit in km/h: 130.95172409
Ausstoßhöhe in m: 4.92337984
Steighöhe in m: 62.67549799
ROT - a(t)
GRÜN - v(t)
GELB - ve(t)
ROSA - F(t)
BLAU - s(Vol)

LEGENDE:

$M = Leermasse + (eventuell\_Masse\_Medium)$

$Cw = c_w = Widerstandsbeiwert$

$B = Raketenquerschnitt$

$A = Düsenquerschnitt$

$r = \rho_L = Luftdichte$

$\rho = Mediumdichte(Wasser)$

$v = Geschwindigkeit$

$s = Impulsweg$

$t = Zeit$

$v_e = Exitgeschwindigkeit(Medium)$

$p_\infty = Umgebungsdruck$

$p_0 = Startdruck$

$p = moment.Brennkammerdruck$

$F = Tankvolumen$

$V_0 = V = Mediumvolumen$

$\kappa = Adiabatenindex$

$g = Gravitationskonstante$